Déviation de Rutherford par le vecteur de Laplace-Lenz-Runge

Pour une particule dans un potentiel central, on a

$$\dot{\vec{p}} = m_\alpha \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(r) = -\left[\frac{d}{dr} V(r)\right] \frac{\vec{r}}{r}$$

Cela mène à deux lois de conservation : celle de l'énergie

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 = \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{r}})^2 + V(r)$$

et celle du moment angulaire :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$L = m_\alpha \omega r^2 = m_\alpha v_0 b$$

Dans la cas d'un potentiel en $1/r$, il y a un autre vecteur conservé :

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{r}}{r} + a\vec{L} \wedge \vec{p}$$

On peut déterminer la valeur de a comme suit :

$$\dot{\vec{\epsilon}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r}\frac{\dot{r}}{r^2} - a\left[\frac{d}{dr} V(r)\right] (\vec{r} \wedge \vec{p}) \wedge \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r}\frac{\dot{r}}{r^2} - ar\left[\frac{d}{dr} V(r)\right] m_\alpha \dot{\vec{r}} + a\vec{r}\left[\frac{d}{dr} V(r)\right] \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Ceci donne donc deux conditions :

$$0 = \frac{1}{r} - a m_\alpha r \left[\frac{d}{dr} V(r)\right]$$

$$0 = -\frac{\dot{r}}{r^2} + a m_\alpha \left[\frac{d}{dr} V(r)\right] \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

En notant que $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \frac{d}{2dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r\dot{r}$, on voit que les deux conditions sont identiques :

$$a = \frac{1}{m_\alpha r^2 \frac{dV(r)}{dr}}$$

On voit qu'un potentiel en $1/r$ donne bien un a constant. Dans le cas du potentiel de Coulomb, $V(r) = \frac{zZe^2}{r}$ et $a = -\frac{1}{m_\alpha zZe^2}$.

Le vecteur ϵ permet de reconstruire la trajectoire sans intégration. En effet, il suffit de considérer $\vec{\epsilon} \cdot \vec{r} = \epsilon r \cos\phi = (\frac{\vec{r}}{r} + a\vec{L} \wedge \vec{p}).\vec{r} = r - aL^2$

Donc la trajectoire est donnée par

$$r = \frac{aL^2}{1 - \epsilon\cos\phi}$$

On voit en dérivant par rapport à ϕ que $\phi = 0$ correspond à la distance minimale d'approche r_0. Nous pouvons calculer ϵ en notant que

$$\epsilon^2 = 1 + (aLm_\alpha v_0)^2 > 1$$

Donc

$$r = \frac{|a|L^2}{\epsilon\cos\phi - 1}$$

a deux asymptotes (suivant le signe de ϕ), avec $\cos\phi = 1/\epsilon$. La trajectoire est en fait une hyperbole d'excentricité ϵ.

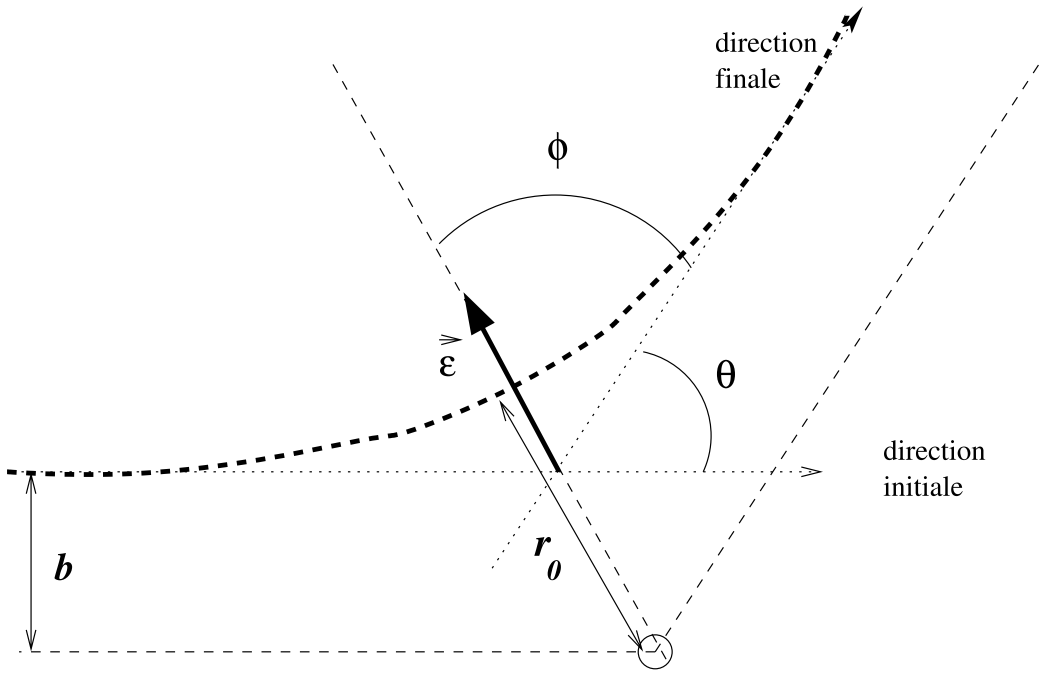
$$\tan^2\phi = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1 = \epsilon^2 - 1 = (aLm_\alpha v_0)^2$$

ou

$$\tan\phi = |a|Lm_\alpha v_0$$

La déviation totale est donnée par $\theta = \pi - 2\phi$. On a donc

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{|a|Lm_\alpha v_0} = \frac{Zze^2}{Lv_0} = \frac{Zze^2}{m_\alpha v_0^2 b}$$



Dans les cas $b = 0$, la distance d'approche est donnée par $V(R) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$, d'où

$$R = \frac{2Zze^2}{m_\alpha v_0^2}$$

On a donc

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{R}{2b}$$